Resonanz mit Weinglas

Lösung

Die Aufgabe lässt sich am besten im Polarkoordinatensystem lösen. Zuerst wird die Amplitudengleichung der stehenden Welle betrachten

$$a(\theta, t) = a_0 \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{1}$$

Dabei entspricht a_0 der maximalen Amplitude, k der Wellenzahl, ω der Kreisfrequenz und x steht für den Ort, jedoch soll darauf hingewiesen werden, dass im Fall der kreisförmigen stehenden Welle x für das Kreissegment auf dem Kreis mit Radius r_K steht.
Im Polarkoordinatensystem lässt sich ein Kreis mit Radius R und $\theta \in [0, 2\pi]$ wie folgt darstellen

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = r_K \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Dass die kreisförimge stehende Welle bei einmaligem Umlauf ($\theta \in [0, 2\pi]$) eine stetige geschlossene Kurve bildet, wird Gleichung (1) aus der Experimentbeschreibung hinzugezogen. Damit kann die Wellenzahl k umgeschrieben werden

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \overset{(1)}{=} \frac{n}{r_K} \tag{3}$$

Des Weiteren gilt für das Kreissegment x, dargestellt in Abbildung 1, folgende Proportion

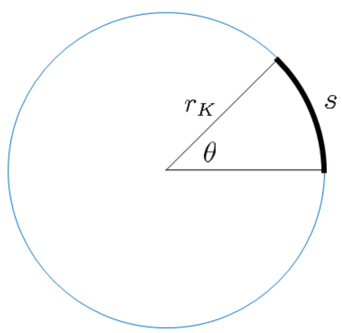

Abbildung 1: Winkel-Radius Relationen

$$\frac{2\pi \cdot r_K}{2\pi} = \frac{x}{\theta} \quad \Rightarrow \quad x = \theta \cdot r_K \tag{4}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (3) und (4) in die Amplitudengleichung der stehenden Welle (1) erhält man

$$a(\theta, t) = a_0 \cdot \cos(n \cdot \theta) \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{5}$$

Die gewünschte Funktion für die Amplitudengleichung einer kreisförmigen stehenden Welle kann nun bestimmt werden, indem die Kreisbahn (2) mit der stehenden Welle (5) überlagert wird

$$\begin{pmatrix} x(\theta, t) \\ y(\theta, t) \end{pmatrix} = [r_K + a_0 \cdot \cos(n \cdot \theta) \cdot \sin(\omega \cdot t)] \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Gleichung (6) entspricht der im Applet verwendeten Funktion.

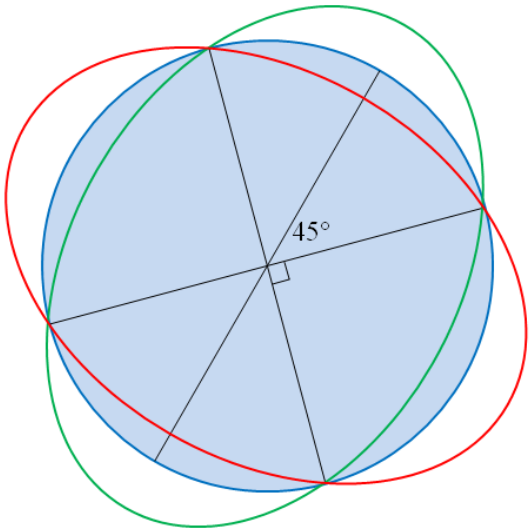

Abbildung 2: $n = 2$ zwei verschiedene Zeiten